CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1986

CONCOURS SCIENCES

EPREUVE A OPTION : OPTION P

MATHEMATIQUES II *Durée : 4 heures*

E est un K−espace vectoriel, de dimension finie supérieure ou égale à 2, K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La loi $\circ$ est la loi de composition habituelle. $M_n(K)$ est l'ensemble des matrices d'ordre n, à coefficients dans K.

L(E) est l'ensemble des endomorphismes de E. On note $\mathrm{Mat}(f, B)$ la matrice de f dans la base B.

Pour f et g dans L(E), on note $f \bullet g$ l'endomorphisme $f \circ g - g \circ f$.

Les différentes parties du problème étudient des propriétés diverses de la loi $\bullet$, elles sont largement indépendantes.

− I −

Dans cette partie, $K = \mathbb{C}$ et $\dim E = 2$.

1) Soit f donné dans L(E). Montrer qu'il existe une base B de E, telle que :

$$T = \mathrm{Mat}(f, B) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

2) Chercher les matrices M telles que $TM - MT = 0$.

3) Caractériser alors f de L(E) telle que pour tout g de L(E), on ait $f \bullet g = 0$.

4) On reprend la question 3, par une autre méthode. E est référé à une base (e_1, e_2). Soit x un vecteur non nul de E et $\mathrm{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ et p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(x)$, parallèlement à F. Montrer que la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée, en utilisant p.

Conclure, en utilisant $e_1 + e_2$.

− II −

Dans cette partie, $K = \mathbb{R}$ et $\dim E = n$.

On étudie f et g de L(E) tels que $f \bullet g = I_E$.

1) Soient A, B et C dans $M_n(\mathbb{R})$. On note tr(A) la trace de A. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, puis $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$ et enfin $\mathrm{tr}(AB)^k = \mathrm{tr}(BA)^k$, pour tout k de $\mathbb{N}$.

2) Soit f dans L(E).

2.1) Montrer qu'on peut définir $\mathrm{tr}(f)$ par $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}(f, B)\big)$, B étant une base quelconque de E.

2.2) Montrer qu'il n'existe pas g de L(E) telle que $f \bullet g = I_E$.

− III −

On suppose dans cette partie que $K = \mathbb{C}$, qu'il existe f non nul de L(E), et g de L(E), tels que :

$$f \bullet g = f .$$

1) Déterminer $\mathrm{tr}(f)$.

Tournez la page S.V.P.

2) Montrer que pour tout μ de $\mathbb{C}$, on a :

$$f \circ \left[g + \mu I_E \right] = \left[g + (\mu + 1)\, I_E \right] \circ f \ .$$

Montrer que $\det(f) = 0$.

3) Dans cette seule question, on suppose que $\dim E = 2$. Montrer que $f^2 = 0$, et qu'il existe une base $B(e_1, e_2)$ de E, telle que :

$$\mathrm{Mat}(f, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1) Montrer que e_1 est vecteur propre commun à f et g .

3.2) Montrer alors l'existence de f non nul et g, tels que $f * g = f$.

— IV —

Dans cette partie, $K = \mathbb{R}$ et $\dim E = 2$. E est référé à une base B .

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Donner une base (V_1, V_2) de vecteurs propres de A, notée B' . On prendra comme deuxième composante respective de V_1 et V_2, 2 et 1 . On pose $P = \mathrm{Mat}(I_E, B', B)$.

2) Dans $M_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices M_{ij}, pour i et j valant 1 ou 2, par leur terme général m_{hk} :

$$m_{ij} = 1 \ ; \ m_{hk} = 0 \quad \text{si} \quad (h, k) \neq (i, j) \ .$$

Montrer que (M_{ij}) est une base de $M_2(\mathbb{R})$. On pose : $T_{ij} = P \cdot M_{ij} \cdot P^{-1}$

Que peut-on dire de la famille (T_{ij}) ?

3) Soit Φ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, définie par :

$$\forall B \in M_2(\mathbb{R}) \ ; \ \Phi(B) = AB - BA \ .$$

Montrer que Φ est linéaire. Calculer $\Phi(T_{ij})$. Montrer que Φ est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de Φ ?

— V —

Dans cette partie, $K = \mathbb{R}$, et $\dim E = 3$. On suppose qu'il existe f et g dans $L(E)$ tels que $\mathrm{rg}(f * g) = 1$. On pose $h = f * g$.

1) Montrer qu'il existe une base. $B = (e_1, e_2, e_3)$ de E, telle que $\mathrm{Mat}(h, B) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En déduire que $h^2 = 0$.

2) Montrer que e_1 est vecteur propre de $h \circ f^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

Montrer que $\mathrm{tr}(h \circ f^k) = 0$, puis que $(h \circ f^k)^2 = 0$.

3) Soit S le sous-espace vectoriel engendré par $\left\{ f^k(e_1) \ ; \ k \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrer que S est stable par f et que S est inclus dans $\mathrm{Ker}\, h$.